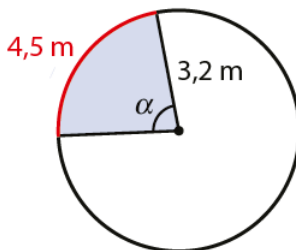


9.1

- a) Kaaren pituus on 4,5 m. Ratkaistaan keskuskulman α suuruus.



$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r \quad \text{Sijoitetaan } b = 4,5 \text{ ja } r = 3,2.$$

$$4,5 = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 3,2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$\alpha \approx 80,57^\circ$$

$$\approx 81^\circ$$

- b) Lasketaan sektorin pinta-ala.

$$A_s = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 \quad \text{Sijoitetaan } \alpha \approx 80,57^\circ \text{ ja } r = 3,2.$$

$$= \frac{80,57^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 3,2^2$$

$$= 7,2 \text{ (m}^2\text{)}$$

Vastaus

a) 81°

b) $7,2 \text{ m}^2$

9.2

Lasketaan sektorin keskuskulman suuruus.

$$A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 \quad \text{Sijoitetaan } A = 1,0 \text{ ja } r = 1,5.$$

$$1,0 = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 1,5^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$\alpha \approx 51^\circ$$

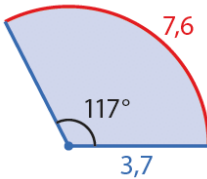
Vastaus

51°

9.3

- a) Piirretään jana, jonka pituus on 3,7. Piirretään janan toiseen päätepisteeseen kulma, jonka koko on 117° .

Piirretään ympyräsektori valitsemalla keskipisteeksi kulman 117° kärkipiste.



Mitataan sektorin kaaren pituus. Kaaren pituus on 7,6.

- b) Lasketaan sektorin kaaren pituus.

$$b = \frac{117^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 3,7 \quad b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r, \text{ missä } \alpha = 117^\circ \text{ ja } r = 3,7. \\ \approx 7,5555$$

Lasketaan sektorin piiri.

$$3,7 + 3,7 + 7,5555 = 14,9555 \approx 15$$

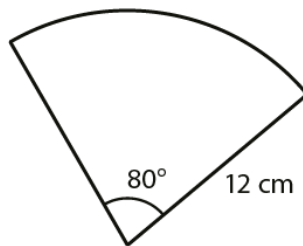
Vastaus

- a) 7,6
b) 15

9.4

Lasketaan sektorin kaaren pituus b .

$$\begin{aligned} b &= \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r \\ &= \frac{80^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 12 \\ &\approx 16,755 \text{ (cm)} \end{aligned}$$



Lasketaan sektorin piiri.

$$12 + 12 + 16,755 = 40,755 \approx 41 \text{ (cm)}$$

Lasketaan sektorin pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 \\ &= \frac{80^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 12^2 \\ &\approx 100 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

Vastaus

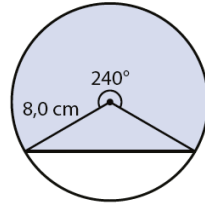
piiri 41 cm, pinta-ala 100 cm²

9.5

Segmentin pinta-ala saadaan, kun väritetyn sektorin pinta-alaan lisätään väritetyn kolmion pinta-ala. Lasketaan väritetyn sektorin pinta-ala.

$$A_s = \frac{240^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 8,0^2$$

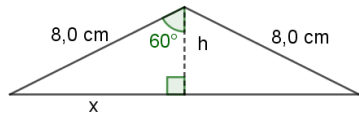
$$A_s = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2, \text{ missä } \alpha = 240^\circ \text{ ja } r = 8,0.$$



$$\approx 134,0413 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Sektoriin lisättävä kolmio on tasakylkinen, jonka huippukulman suuruus on $360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$. Huippukulmasta piirretty korkeusjana puolittaa huippukulman ja kannan.

Ratkaistaan kannan puolikas x suorakulmaisesta kolmiosta, jonka toinen terävä kulma on $\frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$.



$$\sin 60^\circ = \frac{x}{8,0}$$

Sini on vastaisen kateetin suhde hypotenuusaan.
Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \approx 6,9282 \text{ (cm)}$$

Tasakylkisen kolmion kannan pituus on $2x = 2 \cdot 6,9282 \text{ cm} = 13,8564 \text{ cm}$.

Ratkaistaan tasakylkisen kolmion korkeus h .

$$\cos 60^\circ = \frac{h}{8,0}$$

Kosini on viereisen kateetin suhde hypotenuusaan.
Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$h = 4 \text{ (cm)}$$

Lasketaan tasakylkisen kolmion pinta-ala.

$$A_k = \frac{1}{2} \cdot 13,8564 \cdot 4$$

$$A_k = \frac{1}{2} ah, \text{ missä } a = 2x \approx 13,8564 \text{ ja } h = 4.$$

$$\approx 27,7128 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Lasketaan segmentin pinta-ala.

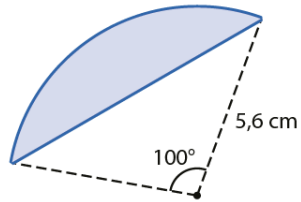
$$134,0413 \text{ cm}^2 + 27,7128 \text{ cm}^2 = 161,7541 \text{ cm}^2 \approx 160 \text{ cm}^2$$

Vastaus

$$160 \text{ cm}^2$$

9.6

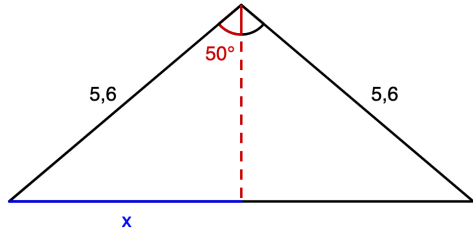
Segmentin piiri p on kaaren pituuden ja jänteen pituuden summa.



Lasketaan kaaren pituus.

$$\begin{aligned} b &= \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r && \text{Sijoitetaan } \alpha = 100^\circ \text{ ja } r = 5,6. \\ &= \frac{100^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 5,6 \\ &\approx 9,7738 \end{aligned}$$

Säteet ja jänne rajaavat tasakylkisen kolmion. Kolmion huippukulmasta piirretty korkeusjana puolittaa huippukulman ja kannan.



Ratkaistaan kannan puolikas x suorakulmaisesta kolmiosta, jonka toinen terävä kulma on

$$\frac{100^\circ}{2} = 50^\circ.$$

$$\sin 50^\circ = \frac{x}{5,6} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x \approx 4,2898 \text{ (cm)}$$

$$\text{Jänteen pituus } 2x \approx 2 \cdot 4,2892 \text{ cm} = 8,5796 \text{ cm.}$$

Lasketaan segmentin piiri p .

$$p = 9,7738 \text{ cm} + 8,5796 \text{ cm} \approx 18 \text{ cm}$$

Segmentin pinta-ala A_{seg} on sektorin pinta-alan A_{sek} kolmion pinta-alan A_k erotus.

Lasketaan sektorin pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_{sek} &= \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 && \text{Sijoitetaan } \alpha=100^\circ \text{ ja } r = 5,6. \\ &= \frac{100^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 5,6^2 \\ &\approx 27,3668 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

Ratkaistaan tasakylkisen kolmion korkeus h .

$$\begin{aligned} \cos 50^\circ &= \frac{h}{5,6} && \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ h &\approx 3,5996 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_k &\approx \frac{1}{2} ah && \text{Sijoitetaan } a = 8,5796 \text{ ja } h = 3,5996. \\ &= \frac{1}{2} \cdot 8,5796 \cdot 3,5996 \\ &\approx 15,4416 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

Lasketaan segmentin pinta-ala.

$$A_{seg} = A_{sek} - A_k \approx 27,3668 \text{ cm}^2 - 15,4416 \text{ cm}^2 \approx 12 \text{ cm}^2$$

Vastaus

piiri 18 cm, pinta-ala 12 cm²

9.7

Lasketaan sektorin keskuskulma osuus täysikulmasta.

Bensiini

$$0,58 \cdot 360^\circ \approx 209^\circ$$

Diesel

$$0,41 \cdot 360^\circ \approx 148^\circ$$

Muut

$$0,01 \cdot 360^\circ \approx 4^\circ$$

Vastaus

bensiini 209° , diesel 148° , muut 4°

9.8

- a) Ympyrän jaetaan viideksi yhtä suureksi sektoriksi, joten keskipisteeseen muodostuva täysikulma jakautuu myös viiteen yhtä suureen osaan. Lasketaan keskuskulman suuruus.

$$\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

- b) Lasketaan sektorin kaaren pituus b .

$$\begin{aligned} b &= \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r \\ &= \frac{72^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 5,0 \\ &\approx 6,3 \text{ (m)} \end{aligned}$$

- c) Lasketaan sektorin pinta-ala A .

$$\begin{aligned} A &= \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 \\ &= \frac{72^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 5,0^2 \\ &\approx 16 \text{ (m}^2\text{)} \end{aligned}$$

Vastaus

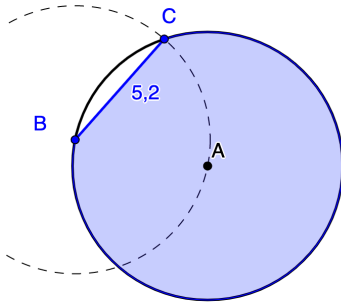
- a) 72°
b) 6,3 m
c) 16 m^2

9.9

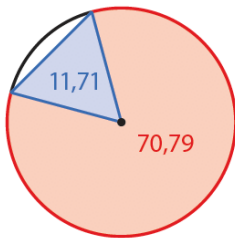
Piirretään ympyrä, jonka säde on 5,2.

Merkitään ympyrän kehälle piste B . Piirretään piste B keskipisteenä uusi ympyrä, jonka säde on 5,2.

Merkitään ympyröiden leikkauspiste C . Piirretään jana BC . Jana BC on ympyrän jänne, jonka pituus on 5,2.



Piirretään kolmio ja sektori ja mitataan niiden pinta-alat. Kolmion pinta-ala on 11,71 ja sektorin 70,79.



Isomman segmentin pinta-ala on $11,71 + 70,79 \approx 82,5$.

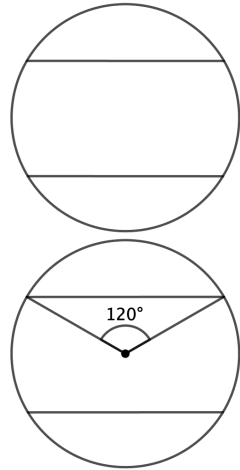
Vastaus

isomman segmentin pinta-ala 82,5

9.10

Piirretään mallikuva.

Pizza jakaantuu kahdeksi yhteneväksi segmentiksi ja niiden väliin jääväksi alueeksi.



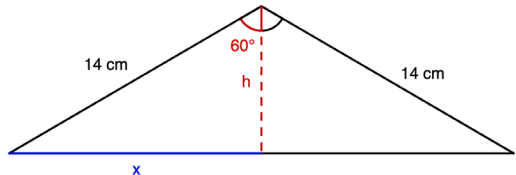
Koska jokaisessa viipaleessa yhtä paljon reunaa, on yhden segmentin kaaren pituus $\frac{1}{3}$ ympyrän kehän pituudesta. Tällöin kaarta vastaava keskuskulma on $\frac{1}{3}$ täydestä kulmasta eli $\frac{1}{3} \cdot 360^\circ = 120^\circ$.

Pizzan halkaisija on 28 cm eli pizzan säde on 14 cm.

Ympyräsektorin pinta-ala on $\frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 14^2 = 205,2507 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Sektorista poistettava kolmio on tasakylkinen, joten huippukulmasta piirretty korkeusjana puolittaa huippukulman ja kannan.

Ratkaistaan kannan puolikas x suorakulmaisesta kolmiosta, jonka toinen terävä kulma on 60° .



$\sin 60^\circ = \frac{x}{14}$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \approx 12,1244 \text{ (cm)}$$

Tasakylkisen kolmion kannan pituus on $2x \approx 2 \cdot 12,1244 \text{ cm} = 24,2488 \text{ cm}$.

Ratkaistaan tasakylkisen kolmion korkeus h .

$$\cos 60^\circ = \frac{h}{14} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$h = 7 \text{ (cm)}$$

Lasketaan tasakylkisen kolmion pinta-ala.

$$A_k \approx \frac{1}{2} \cdot 24,1244 \cdot 7 = 84,8708 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Segmentin pinta-ala on

$$205,2507 \text{ cm}^2 - 84,8708 \text{ cm}^2 = 120,3799 \approx 120 \text{ cm}^2.$$

Toinen segmentti on yhtä suuri.

Segmenttien väliin jäävän alueen pinta-ala saadaan vähentämällä segmenttien pinta-alat pizzan pinta-alasta.

$$\pi \cdot 14^2 - 2 \cdot 120,3799 \approx 375 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vastaus

Viipaleiden pinta-alat ovat 120 cm^2 , 375 cm^2 ja 120 cm^2 .

9.11

a) Lasketaan keskuskulman α suuruus.

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

$$5,0 = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 4,9 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$\alpha \approx 58,465^\circ \approx 58^\circ$$

b) Lasketaan sektorin pinta-ala A .

$$A = \frac{58,465^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 4,9^2 \approx 12 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vastaus

a) 58°

b) 12 cm^2

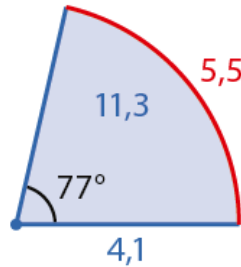
9.12

a)

Piirretään jana, jonka pituus on 4,1, ja kulma, jonka suuruus on 77° . Piirretään sektori.

Mitataan kaaren pituus. Pituus on 5,5.

Mitataan sektorin pinta-ala. Pinta-ala on 11,3.



b) Lasketaan sektorin kaaren pituus.

$$\frac{77^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 4,1 \approx 5,5$$

Lasketaan sektorin piiri.

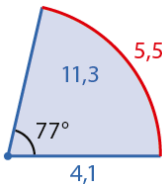
$$2 \cdot 4,1 + 5,5 \approx 13,7$$

Lasketaan sektorin pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 \\ &= \frac{77^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 4,1^2 \\ &\approx 11,3 \end{aligned}$$

Vastaus

a)



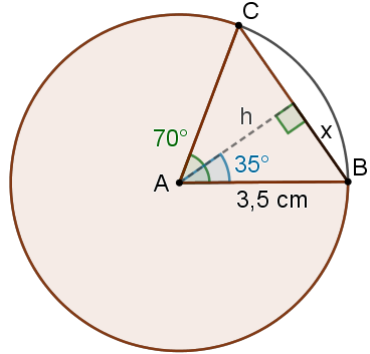
kaaren pituus 5,5; pinta-ala 11,3

b) piiri 13,7; pinta-ala 11,3

9.13

Isompi segmentti koostuu väritetystä sektorista ja kolmiosta.

Tasakylkisen kolmion ABC korkeusjana h jakaa janan BC ja 70° kulman puoliksi.



Ratkaistaan janan x pituus.

$$\sin 35^\circ = \frac{x}{3,5}$$

$$x \approx 2,00 \text{ (cm)}$$

Tasakylkisen kolmion kannan pituus on $2x \approx 2 \cdot 2,00 \text{ cm} = 4,00 \text{ cm}$.

Ratkaistaan korkeusjanan h pituus.

$$\cos 35^\circ = \frac{h}{3,5}$$

$$h \approx 2,87 \text{ (cm)}$$

Lasketaan tasakylkisen kolmion ABC pinta-ala.

$$A_k = \frac{1}{2} \cdot 4,00 \cdot 2,87 \approx 5,74 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Isomman sektorin keskuskulma on $360^\circ - 70^\circ = 290^\circ$.

Lasketaan väritetyn sektorin pinta-ala.

$$A_s = \frac{290^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 3,5^2 \approx 31,00 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Lasketaan isomman segmentin pinta-ala.

$$31,00 \text{ cm}^2 + 5,74 \text{ cm}^2 \approx 37 \text{ cm}^2$$

Vastaus

37 cm^2

9.14

- a) Täysikulman suuruus on 360° . Lasketaan yhden sektorin keskuskulman suuruus.

$$\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

- b) Lasketaan yhden sektorin kaaren pituus.

$$\frac{45^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 4 = \pi$$

- c) Lasketaan yhden sektorin pinta-ala.

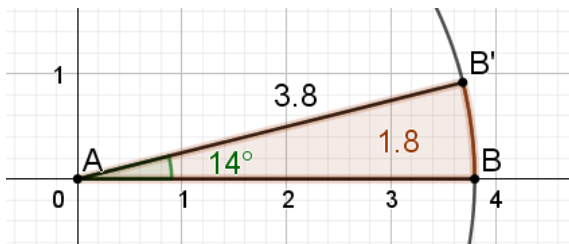
$$\frac{45^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 16^2 = 2\pi$$

Vastaus

- a) 45°
b) π
c) 2π

9.15

- a) Piirretään sektori ja mitataan sen pinta-ala.



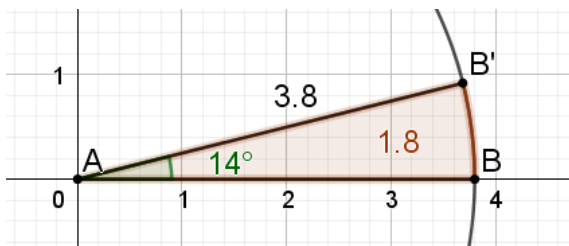
Pinta-ala on $1,8 \text{ km}^2$.

- b) Lasketaan sektorin pinta-ala.

$$A_s = \frac{14^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 3,8^2 \approx 1,8 \text{ (km}^2\text{)}$$

Vastaus

- a)



- b) $1,8 \text{ km}^2$

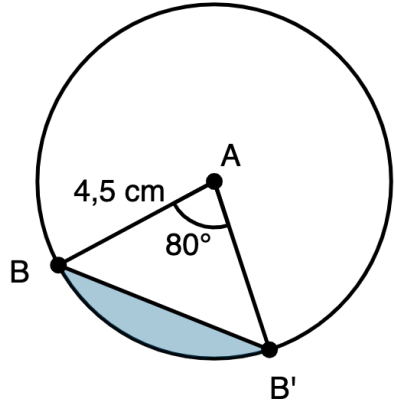
9.16

a)

Piirretään ympyrä, jonka säde on 4,5 (cm).

Merkitään ympyrän kehälle piste B . Piirretään pisteen B ja ympyrän keskipisteen A avulla kulma, jonka koko on 80° .

Piirretään kolmio ympyrän keskipisteen ja kahden kehällä olevan pisteen kautta.

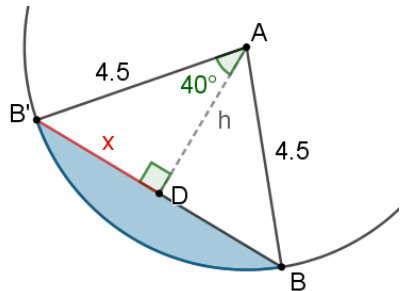


Piirretään ympyränkaari keskipisteen ja kahden pisteen avulla.

Segmentti saadaan väritettyä, kun muutetaan ympyränkaaren värin peittävyudeksi esimerkiksi 20.

b) Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa sekä kannan että huippukulman.

Segmentin pinta-ala saadaan vähentämällä tasakylkisen kolmion pinta-ala sektorin pinta-alasta.



Lasketaan tasakylkisen kolmion korkeusjanan pituus h .

$$\cos 40^\circ = \frac{h}{4,5}$$

$$h \approx 3,447 \text{ (cm)}$$

Lasketaan tasakylkisen kolmion kannan puolikkaan pituus x .

$$\sin(40) = \frac{x}{4,5}$$

$$x \approx 2,893 \text{ (cm)}$$

Lasketaan sektorin pinta-ala.

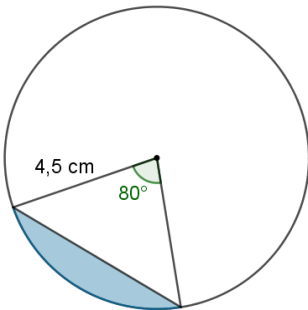
$$A_{sek} = \frac{80^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 4,5^2 \approx 14,1372 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Lasketaan segmentin pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_{seg} &= A_{sek} - A_{kolmio} \\ &= \frac{80^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 4,5^2 - \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 2,893) \cdot 3,447 \\ &\approx 4,2 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

Vastaus

a)



b) 4,2 cm²

9.17

Leikattavan sektorin keskuskulman suuruus on yhtä suuri osa täysikulmasta kuin palan hinta on koko pitsan hinnasta.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan keskuskulman suuruus α .

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{2}{9}$$
$$\alpha = 80^\circ$$

Vastaus

80°

9.18

Tornikello on muodoltaan ympyrä.

Tuntiviisarin kärjen kulkema 23 senttimetrin matka on yhtä suuri osa koko kehän pituudesta kuin 20 minuuttia on 12 tunnista.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan ympyrän kehän pituus p .

$$\frac{23}{p} = \frac{20}{12 \cdot 60}$$
$$p = 828 \text{ (cm)}$$

Osoitin on yhtä pitkä kuin kellon säde. Ratkaistaan osoittimen pituus.

$$828 = 2\pi r$$
$$r \approx 130 \text{ (cm)}$$

Osoittimen pituus on $130 \text{ cm} = 1,3 \text{ m}$.

Vastaus

1,3 m

9.19

Merkitään ympyrän sädettä kirjaimella r .

Sektorin piirin pituus on $\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r + 2r$.

Ympyrän kehän pituus on $2\pi r$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan keskuskulman suuruus.

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r + 2r = 2\pi r \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

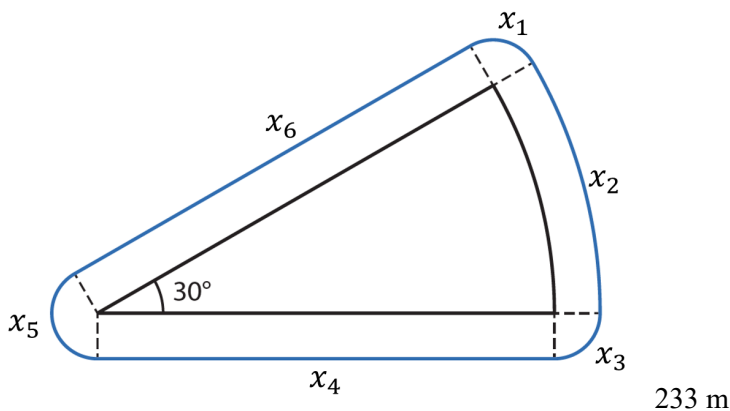
$$\alpha \approx 245^\circ$$

Keskuskulman suuruus on 245° .

Vastaus

245°

9.20



Lasketaan reitin osien pituudet.

$$x_1 = x_3 = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 1 \approx 1,578 \text{ (m)}$$

$$x_2 = \frac{30^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 91,0 \approx 47,647 \text{ (m)}$$

$$x_4 = x_6 = 90,0 \text{ (m)}$$

$$x_5 = \frac{360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - 30^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 1 \approx 2,618 \text{ (m)}$$

Lasketaan reitin pituus.

$$2 \cdot 1,577 \text{ m} + 47,647 \text{ m} + 2 \cdot 90,0 \text{ m} + 2,618 \text{ m} \approx 233 \text{ m}.$$

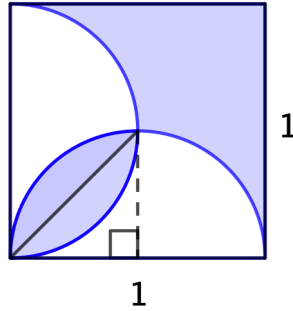
Vastaus

9.21

Täydennetään kuvaa.

Lasketaan yhden sinisen ympyräsegmentin pinta-ala.

$$\begin{aligned}
 A_{seg} &= A_{sek} - A_k \\
 &= \underbrace{\frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}_{\text{sektorin pinta-ala}} - \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{\text{kolmion pinta-ala}} \\
 &= \frac{1}{16} \pi - \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$



Lasketaan valkoisen alueen pinta-ala. Alue muodostuu kahdesta puoliympyrästä, joista kummastakin vähennetään kahden segmentin pinta-ala.

$$\begin{aligned}
 A_v &= 2(A_{py} - 2 \cdot A_{seg}) \\
 &= 2 \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}_{\text{puoliympyrän pinta-ala}} - \underbrace{2 \cdot \left(\frac{1}{16} \pi - \frac{1}{8}\right)}_{\text{kahden segmentin pinta-ala}} \right) \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Neliön pinta-ala on 1, joten väritetyn alueen pinta-ala on $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Vastaus

$$\frac{1}{2}$$